Вопрос 21.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (последовательностью Коши).

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall m > N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$

Теорема: Числовая последовательность сходится тогда и только тогда когда она фундаментальна.

◀ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. По числу $\varepsilon > 0$ найдем номер N так чтобы при $n > N$ $|x_n - A| = \frac{\varepsilon}{2}$. Если теперь $m > N$ и $n > N$, то $|x_m - x_n| < |x_m - A| + |x_n - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Таким образом проверено что сходящаяся последовательность фундаментальна

Пусть теперь $\{x_k\}$ - фундаментальная послед.

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем N что $m \geq N$, $k > N$ $|x_m - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. фиксируем $m = N$ получаем что при любой $k > N$

$x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_n + \frac{\varepsilon}{3}$. Но т.к. $\{x_n\}$ конечное с номерами членов не превосход. N то мы доказали что последовательность ограничена